

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Espace des applications Lipschitziennes</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Espace métrique et applications lipshitzziennes . . . . .	5
1.3	Espace métrique . . . . .	6
1.4	Les applications lipschitziennes . . . . .	7
1.5	L'espace $Lip_0(X, E)$ . . . . .	10
1.6	Espace de Lipschitz-Libre . . . . .	11
1.6.1	<b>Espace de Arens-Eells</b> . . . . .	12
1.6.2	<b>Espace de Banach libre</b> . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Opérateurs Lipschitziens strictement <math>p</math>-sommants</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Théorème de domination de Pietsch . . . . .	19
2.3	Opérateurs Lipschitz strictement $p$ -sommants . . . . .	19
2.4	Caractérisation des opérateurs Lipschitz strictement $p$ -sommants . . . . .	21
2.5	Représentation tensorielle Lipschitzienne de la classe $\Pi_p^{SL}(X, E)$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>La classe des opérateurs Lipschitziens <math>\phi</math>-sommants</b>	<b>28</b>
3.1	Introduction . . . . .	28
3.2	Les opérateurs linéaires $\phi$ -sommants . . . . .	28

3.3	Théorème de Domination de Pietsch . . . . .	31
3.4	Les opérateurs lipschitziens $\phi$ –sommants . . . . .	32
3.5	Théorème de Domination de Pietsch (Version lipschizienne) . . . . .	35
3.6	Les opérateurs Lipschitziens $(\varphi, \phi)$ -sommants . . . . .	38

## 0.1 Introduction

Les travaux de ce mémoire s'inscrivent dans le cadre de la théorie des opérateurs Lipschitz sommants. Cette dernière théorie s'inspire leurs idées de la théorie linéaire des opérateurs  $p$ -sommant introduite par Grothendieck en 1956 et Pietsch en 1968. Dans ce mémoire, on va étudier les opérateurs Lipschitz  $p$ -sommants en premier lieu et voir également certaines classes qui généralisent la définition de Lipschitz  $p$ -sommant. Commençons par les opérateurs strictement Lipschitz  $p$ -sommants et en terminant par les opérateurs Lipschitz  $\Phi$ -sommants. Soit  $T : X \rightarrow E$  un opérateur Lipschitzien où  $X$  est un espace métrique et  $E$  est un Banach. On associe sa linéarisation

$$\widehat{T} : \mathcal{F}(X) \rightarrow E.$$

Notons ici que si  $\widehat{T}$  est linéaire  $p$ -sommant entraîne que  $T$  est Lipschitz  $p$ -sommant, mais la réciproque n'est plus vraie. Pour récupérer cette propriété l'auteur dans [9] a introduit la définition d'opérateurs Lipschitz strictement  $p$ -sommant. La définition des opérateurs linéaires  $\Phi$ -sommant a été introduite dans le cas linéaire par R. Khalil en 1987 [7]. En 2017, M. Belaala a considéré le cas Lipschitzien pour donner une nouvelle version dans cette catégorie. Il a prouvé et montré le théorème de factorisation de Pietsch.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on donnera un aperçu général sur les opérateurs Lipschitziens et leurs propriétés. On commence par rappeler certains résultats concernant les espaces de Banach et les espaces métriques. On consacre le reste de ce chapitre à l'étude des applications Lipschitziennes et leurs résultats de factorisation. Pour tout opérateur Lipschitzien  $T : X \rightarrow E$  on peut associer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ \delta_X \downarrow & \nearrow \widehat{T} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

où  $\delta_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  est l'isométrie non linéaire définie par  $\delta_X(x) = \delta_x$ .

Cette factorisation va jouer un rôle important dans la théorie des applications Lipschitziennes, elle donne un lien entre un opérateur Lipschitzien et sa linéarisation qui est un opérateur linéaire. L'espace  $\mathcal{F}(X)$  est appelé espace Lipschitz libre, il a été introduit en 2003 dans [6] par Godefroy.

Dans le deuxième chapitre, on étudie la classe des opérateurs Lipschitziens  $p$ -sommants. Cette classe a été introduite par Farmer et Johnson en 2009 [5] comme généralisation naturelle du cas linéaire des opérateurs  $p$ -sommants, il sont montré qu'elle coïncide avec la classe des opérateurs linéaires  $p$ -sommants. De plus, elle vérifie le théorème de domination de Pietsch. Ensuite, on verra la classe des opérateurs Lipschitziens strictement  $p$ -sommants  $\Pi_p^{SL}(X, E)$  introduite dans [2]. Une relation importante entre ces opérateurs et leurs linéarisations pour la notion  $p$ -sommants sera établie, en effet on verra que

$$T \text{ est Lipschitz strictement } p\text{-sommant} \Leftrightarrow \widehat{T} \text{ est } p\text{-sommant}.$$

On termine ce chapitre en établissant une représentation tensorielle Lipschitzienne de cette nouvelle classe. En effet, on va définir une norme tensorielle  $\Lambda_p^L$  sur l'espace vectoriel

$$X \boxtimes E = \text{span} \{ \delta_x \boxtimes e : x \in X \text{ et } e \in E \},$$

puis on montre que le dual de l'espace  $X \boxtimes E^*$  muni de la norme  $\Lambda_p^L$  coïncide avec l'espace des opérateurs Lipschitziens strictement  $p$ -sommants,

$$\left( X \widehat{\boxtimes}_{\Lambda_p^L} E^* \right)^* = \Pi_p^{SL}(X, E).$$

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des opérateurs Lipschitziens  $\phi$ -sommants où  $\phi$  est une fonction modulus. En basant sur l'article de M. Belaala "*Lipschitz  $\phi$ -summing operators*", en faisant une étude approfondie sur ces opérateurs. Cette classe vérifie le théorème de domination de Pietsch. On termine ce chapitre en donnant la définition des opérateurs Lipschitzien  $(\varphi, \phi)$ -sommant avec  $\varphi, \phi$  sont deux fonctions modulus.

# Chapitre 1

## Espace des applications Lipschitziennes

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on commencera par exposer l'espace métrique en donnant certains exemples. Ensuite, on étudiera les espaces métriques ainsi que les applications Lipschitziennes et leurs propriétés. Le reste de ce chapitre est consacré à l'étude de la structure de l'espace de Banach Lipschitz libre.

### 1.2 Espace métrique et applications lipshitziennes

#### Espace de Banach

Dans la suite,  $\mathbb{K}$  représente le corps de nombre réel  $\mathbb{R}$  ou bien celle de nombre complexe  $\mathbb{C}$ . Tous les espaces vectoriels sont toujours supposés des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 1.1.** *Soit  $X$  un espace vectoriel sur le corps  $K$ . On appelle une norme sur  $X$  l'application*

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

$$(i) \quad \forall x \in X : \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

$$(ii) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un espace vectoriel muni d'une norme sera appelé espace vectoriel normé. Un espace vectoriel normé  $X$  est dit de Banach, si toute suite de Cauchy dans  $X$  est convergente dans  $X$ . C'est à dire, un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de la norme.

**Proposition 1.2.**

- 1) Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.
- 2) Tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

## 1.3 Espace métrique

**Définition 1.3.** Soit  $X$  un ensemble non vide. On dit que  $d$  est une distance sur  $X$  si et seulement si  $d$  est une application de  $X^2$  dans  $R^+$  telle que pour tout  $(x, y, z) \in X^3$ , on a

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{Séparation})$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symétrie})$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Inégalité triangulaire}).$$

Le couple  $(X, d)$  sera appelé espace métrique. On choisit un élément  $e \in X$ , le triplet  $(X, d, e)$  sera appelé espace métrique pointé (i.e.,  $e$  est l'élément neutre si  $X$  est normé). On note par

$$M_0 = \{\text{espaces métriques complets pointés}\}.$$

**Remarque 1.4.** A une norme on peut toujours associer une distance  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie comme suit :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

**Exemple 1.5.** L'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$  est un espace métrique.

**Exemple 1.6.** Soit  $X = C([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Il y a plusieurs façons de donner une distance sur cet espace, par exemple

1.  $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
2.  $d_2(f, g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$
3.  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}.$

## 1.4 Les applications lipschitziennes

**Définition 1.7.** Une application  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  entre deux espaces métriques est dite lipschitzienne s'il existe  $k > 0$ , telle que

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y). \quad (1.1)$$

On dit aussi qu'elle est  $k$ -lipschitzienne.

**Remarque 1.8.**

- Si  $k = 1$ ,  $f$  est dite non expansive.
- Si  $k < 1$ ,  $f$  est dite une contraction.

Pour une application lipschitzienne  $f$ , on définit la constante de Lipschitz par

$$\begin{aligned} Lip(f) &= \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \\ &= \inf \{k, k \text{ vérifiant (1.1)}\}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.9.** Soient  $f, g$  deux applications lipschitziennes de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la constante de Lipschitz vérifie les propriétés suivante :

- (1)  $Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g)$
- (2)  $Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f)$ .

**Preuve.**

(1). Soient  $f$  et  $g$  deux applications lipschitziennes de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x, y \in X$ , on a

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (Lip(f) + Lip(g)) d_X(x, y) \end{aligned}$$

Donc  $f + g$  est lipschitzienne et

$$Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g).$$

(2) Si  $\lambda$  est dans  $\mathbb{R}$ , pour  $(x, y)$  dans  $X^2$

$$\begin{aligned} Lip(\lambda f) &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d_X(x, y)} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda| |f(x) - f(y)|}{d_X(x, y)} \\ &= |\lambda| Lip(f) \end{aligned}$$

Donc  $\lambda f$  est lipschitzienne de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  et

$$Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f). \quad \blacksquare$$



**Proposition 1.10.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$ , deux applications lipschitziennes, alors  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est lipschitzienne et

$$\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \text{Lip}(f).$$

**Preuve.** Si  $f$  est lipschitzienne de  $X$  dans  $Y$  et  $g$  est lipschitzienne de  $Y$  dans  $Z$ , alors

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x), g \circ f(y)) &\leq \text{Lip}(g) d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq \text{Lip}(g) \text{Lip}(f) d_X(x, y). \end{aligned}$$

Alors  $g \circ f$  est lipschitzienne et

$$\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \text{Lip}(f). \quad \blacksquare$$

**Définition 1.11.** Soit  $(X, e_1, d_1)$  et  $(Y, e_2, d_2)$  deux espaces métriques pointés, on dit que  $f : X \rightarrow Y$  préserve l'élément distingué si

$$f(e_1) = e_2.$$

**Définition 1.12.** (Espaces Lipschitz isomorphes). Soient  $(X, d_1), (Y, d_2)$  deux espaces métriques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est bi-Lipschitz si  $f$  est bijective et  $f, f^{-1}$  sont lipschitziennes. Dans ce cas,  $X$  et  $Y$  sont dits Lipschitz isomorphes.

*Définition 1.13.* Une application  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est dite isométrie si

$$\forall (x, y) \in X^2 : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

**Proposition 1.14.** Tout espace métrique  $(X, d)$  est isométrique à un sous ensemble de  $\ell_\infty(I)$ . Si  $X$  est séparable alors  $X$  est isométrique à un sous ensemble de  $\ell_\infty(\mathbb{N})$ .

**Remarque 1.15.** Tout application lipschitzienne est uniformément continue, mais la réciproque est fausse. Par exemple la fonction  $x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$  est uniformément continue, mais elle n'est pas lipschitzienne.

**Proposition 1.16.** (*Extension d'une application lipschitzienne*). Soient  $X_0$  et  $Y_0$  deux espaces métriques danses et  $X, Y$  leurs complétés respectivement (i.e.,  $\overline{X_0} = X$  et  $\overline{Y_0} = Y$ ). Soit  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  une application lipschitzienne. Alors il existe une unique extension  $f : X \rightarrow Y$  telle que

$$Lip(f) \leq Lip(f_0).$$

## 1.5 L'espace $Lip_0(X, E)$

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de toutes les applications lipschitziennes définies d'un espace métrique dans un espace de Banach.

**Définition 1.17.** Soit  $X$  un espace métrique et  $E$  un espace de Banach. On note par  $Lip(X, E)$  l'espace de toutes les applications lipschitziennes bornées de  $X$  dans  $E$

$$Lip(X, E) = \{f : X \rightarrow E \text{ lipschitzienne bornée}\}.$$

**Remarque 1.18.** L'espace  $Lip(X, E)$  est un espace vectoriel.

On muni l'espace  $Lip(X, E)$  de la norme

$$\|f\| = \max\{Lip(f), \|f\|_\infty\}$$

Si  $E = \mathbb{R}$  alors on note simplement

$$\begin{aligned} Lip(X, \mathbb{R}) &= Lip(X). \\ &= X^\# \end{aligned}$$

**Définition 1.19.** Soit  $(X, d_X, e)$  un espace métrique pointé. Pour tout espace de Banach  $E$ , nous désignons par  $Lip_0(X, E)$  l'espace de toutes les applications lipschitziennes  $f : X \rightarrow E$  nulles au point  $e$

$$Lip_0(X, E) = \{f : X \rightarrow E \text{ lipschitzienne telle que } f(e) = 0\}.$$

**Remarque 1.20.** Si on muni  $Lip_0(X, E)$  de la norme

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

alors l'espace  $Lip_0(X, E)$  devient un espace de Banach. Si  $E = \mathbb{R}$  on note

$$Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X).$$

**Définition 1.21.** Soit  $X$  un espace métrique pointé. On appelle dual Lipschitzien, on note par  $X^\#$ , l'espace de Banach des formes lipschitziennes sur  $X$

$$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R}).$$

Muni de la norme

$$Lip(x^\#) = \sup_{x \neq y} \frac{|x^\#(x) - x^\#(y)|}{d_X(x, y)}$$

## 1.6 Espace de Lipschitz-Libre

Dans cette section on va définir le préduel de  $Lip_0(X)$ , c'est à dire un espace de Banach  $Z$ , telle que  $Lip_0(X)$  est isométriquement isomorphe à  $Z^*$

$$Lip_0(X) = Z^*.$$

**Adjoint des opérateurs lipschitziens**

Soient  $X, Y$  deux espaces métriques pointés. Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application lipschitzienne. On définit l'adjoint lipschitzien de  $T$  par

$$\begin{aligned} T^\# : Lip(Y) &\rightarrow Lip(X) \\ g &\rightarrow T^\#(g) = g \circ T \end{aligned}$$

**Proposition 1.22.** *L'opérateur  $T^\#$  est linéaire continu et*

$$\|T^\#\| = Lip(T).$$

**Preuve.** Soient  $g_1, g_2 \in Lip(Y)$ . Alors,

$$\begin{aligned} T^\#(g_1 + g_2) &= (g_1 + g_2) \circ T \\ &= g_1 \circ T + g_2 \circ T \\ &= T^\#(g_1) + T^\#(g_2). \end{aligned}$$

Le reste est facile à démontrer. ■

### 1.6.1 Espace de Arens-Eells

**Définition 1.23.** *Soit  $X$  un espace métrique. Une molécule  $X$  est une fonction  $m : X \rightarrow \mathbb{R}$  à support fini et satisfait*

$$\sum_{x \in X} m(x) = 0.$$

Désignons par  $M(X)$  l'espace vectoriel de tous les molécules sur  $X$ . Pour  $x, x' \in X$ , la molécule de base  $m_{xx'}$  définie par

$$m_{xx'} = \chi_{\{x\}} - \chi_{\{x'\}},$$

où  $\chi_A$  désigne la fonction caractéristique de  $A$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

**Remarque 1.24.** Pour tout  $m \in M(X)$ ,  $m$  s'écrit sous la forme

$$m = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{xx'}$$

Cette écriture n'est pas unique.

Soit  $X$  un espace métrique. Munissons l'espace des molécules  $M(X)$  de la norme suivante

$$\|m\|_{M(X)} = \left\{ \inf \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x, x') : m = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{xx'} \right\}.$$

Alors,  $(M(X), \|\cdot\|_{M(X)})$  est un espace normé.

Notons  $\mathcal{A}(X)$  le complété de l'espace normé  $(M(X), \|\cdot\|_{M(X)})$ . Parfois l'espace  $\mathcal{A}(X)$  s'appelle l'espace de Lipschitz libre de  $X$  et on le note aussi par  $\mathcal{F}(X)$ . Cet espace a été présenté pour la première fois par Arens et Eells en 1956.

**Proposition 1.25.** *Soit  $X$  un espace métrique pointé. Les espaces  $X^\#$  et  $\mathcal{A}(X)^*$  sont isométriquement isomorphes. C'est-à-dire*

$$Lip_0(X) = \mathcal{A}(X)^*.$$

**Preuve.** On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} S : \mathcal{A}(X)^* &\rightarrow Lip_0(X) \\ \phi &\rightarrow S(\phi). \end{aligned}$$

telle que  $S(\phi)(x) = \phi(m_{xe})$ , pour tout  $x, x' \in X$ . On a

$$\begin{aligned} |S(\phi)(x) - S(\phi)(x')| &= |\phi(m_{xe}) - \phi(m_{x'e})| \\ &= |\phi(m_{xx'})| \\ &\leq \|\phi\| d(x, x'). \end{aligned}$$

D'où  $Lip(S\phi) \leq \|\phi\|$ . Ainsi  $(S\phi)(0) = \phi(0)$ , alors  $S\phi \in Lip_0(X)$ . Nous concluons que  $S$  est une application linéaire et  $\|S\| \leq 1$ . Maintenant on définit l'application suivante

$$\begin{aligned} R : Lip_0(X) &\rightarrow \mathcal{A}(X)^* \\ f &\rightarrow R(f). \end{aligned}$$

telle que

$$R(f)(m) = \sum_x m(x) f(x),$$

pour  $f \in Lip_0(X)$  et  $m \in \mathcal{A}(X)$ . Pour  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{xx'}$ . On a donc

$$\begin{aligned} |(Rf)(m)| &= |(Rf)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i m_{xx'}\right)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |f(x_i) - f(x_i')| \\ &\leq Lip(f) \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x_i, x_i'). \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes les représentations de  $m$  sous la forme  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{xx'}$ , on trouve

$$|(Rf)(m)| \leq Lip(f) \|m\|,$$

d'où  $Rf \in \mathcal{A}(X)^*$  et  $\|Rf\| \leq Lip(f)$ . Alors nous concluons que  $R$  est une application linéaire non expansive ( $\|Rf\| \leq 1$ ) à partir de  $Lip_0(X)$  à  $\mathcal{A}(X)^*$ . Enfin, un simple calcul indique que  $R \circ S = id_{\mathcal{A}(X)}$ , et  $S \circ R = d_{X^\#}$ . Donc

$$X^\# \cong \mathcal{A}(X)^*. \quad \blacksquare$$

**Proposition 1.26.** *L'application*

$$\begin{aligned} i_X : X &\rightarrow \mathcal{A}(X) \\ x &\rightarrow i_X(x) = m_{xe}. \end{aligned}$$

est isométrie non linéaire.

**Proposition 1.27.** Soit  $X \in M_0$ .

(1) Pour tout molécule  $m$ , on a

$$\|m\|_{\mathbb{E}(X)} = \sup_{f \in B_{X\#}} |\langle m, f \rangle|.$$

(2)  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}(X)}$  est la plus grand semi norme sur  $M(X)$  qui satisfait

$$\|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\|_{\mathbb{E}(X)} = d(x, y), \forall x, y \in X.$$

**Théorème 1.28.** (Linéarisation). Soient  $X$  un espace métrique pointé,  $E$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow E$  un opérateur lipschitzien et  $f(e) = 0$ . Alors, il existe un unique opérateur linéaire borné  $\tilde{T} : \mathbb{E}(X) \rightarrow E$ , tel que

$$T = \tilde{T} \circ i_X \text{ et } \|\tilde{T}\| = Lip_0(T).$$

Autrement dit, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{E}(X) & \\ i_X \uparrow & \searrow & \tilde{T} \\ X & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

## 1.6.2 Espace de Banach libre

**Espace de Banach libre** (*Free Banach space*). L'espace de Banach libre  $\mathcal{F}(X)$  sur un espace métrique pointé  $X$  est l'espace vectoriel fermé dans  $(Lip_0(X))^*$  engendré par les fonctions d'évaluations  $\delta_x : Lip_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$  où

$$\delta_x(f) = f(x) \text{ et } x \in X.$$

C'est à dire

$$\mathcal{F}(X) = \overline{\text{span}\{\delta_x : x \in X\}}^{(Lip_0(X))^*}.$$

Cet espace a été étudié et appelé par ce nom par Godefroy et Kalton en 2003.

**Théorème 1.29.** *Nous avons*

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{A}(X) \text{ et donc } \mathcal{F}(X)^* = \text{Lip}_0(X),$$

*D'autre part, nous avons pour tout opérateur Lipschitzien  $T : X \rightarrow E$  la factorisation suivante*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ \delta_X \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$



# Chapitre 2

## Opérateurs Lipschitziens strictement $p$ -sommants

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier la classe des opérateurs Lipschitziens strictement  $p$ -sommants. Cette classe a été introduite par K.Saadi en 2015 et elle est considérée comme la première extension des opérateurs linéaires sommants dans le cas Lipschitzien. Il a montré également que sa définition coïncide avec celle du cas linéaire dans le cas des opérateurs linéaires. On termine ce chapitre par donner une représentation tensorielle Lipschitzienne de cette classe.

**Définition 2.1** [5]. Soient  $X, Y$  deux espaces métriques. Une application lipschitzienne  $T : X \rightarrow Y$  est dite lipschitzienne  $p$ -sommant ( $1 \leq p < \infty$ ), s'il existe une constante  $C > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$ ,  $\forall (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \subset R_+$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i d_Y (T(x_i) - T(y_i))^p \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \alpha_i |f(x_i) - f(y_i)|^p. \quad (2.1)$$

La classe des opérateurs lipschitziens  $p$ -sommant de  $X$  dans  $Y$  est notée par  $\Pi_p^L(X, Y)$ .

Mune de la norme

$$\pi_p^L(T) = \inf \{C; C \text{ vérifiant l'inégalité (2.1)}\}.$$

**Remarque 2.2.**

- 1) Dans la définition précédente, on peut prendre les  $\alpha_i = 1, \forall 1 \leq i \leq n$ .
- 2)  $Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$ , pour tout  $T \in \Pi_p^L(X, Y)$ .

**Théorème 2.3** [5]. *Soit  $(1 \leq p < \infty)$ , supposons que  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach. Alors, si  $T$  est un opérateur linéaire borné de  $X$  dans  $Y$ , alors*

$$\pi_p^L(T) = \pi_p(T).$$

**Proposition 2.4** (Propriété d'idéal). *Soient  $X, Y, E, F$  des espaces métriques. Soient  $v : E \rightarrow Y, \omega : Y \rightarrow F$  des applications lipschitziennes et  $T : X \rightarrow Y$ , un opérateur Lipschitz  $p$ -sommant. Alors l'opérateur  $\omega T v$  est Lipschitz  $p$ -sommant et*

$$\pi_p^L(\omega T v) \leq Lip(\omega) \pi_p^L(T) Lip(v).$$

**Preuve.** Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset E$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(\omega T v(x_i) - \omega T v(y_i))^p &\leq Lip(\omega) \sum_{i=1}^n d(T v(x_i) - T v(y_i))^p \\ &\leq Lip(\omega) \pi_p^L(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n |f(v(x_i)) - f(v(y_i))|^p \\ &\leq Lip(\omega) \pi_p^L(T) Lip(v)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(v(x_i))}{Lip(v)} - \frac{f(v(y_i))}{Lip(v)} \right|^p \\ &\leq Lip(\omega)^p \pi_p^L(T)^p Lip(v)^p \sup_{g \in B_{E^\#}} \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(y_i)|^p \end{aligned}$$

On pose  $g = f \circ v$ . D'où  $\omega T v \in \Pi_p^L(E, F)$  et

$$\pi_p^L(\omega T v) \leq Lip(\omega) \pi_p^L(T) Lip(v). \quad \blacksquare$$

## 2.2 Théorème de domination de Pietsch

**Théorème 2.5** [5]. Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $C > 0$  et  $T \in \text{Lip}(X, Y)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) L'opérateur  $T$  est Lipschitz  $p$ -sommant et  $\pi_p^L(T) \leq C$ .
- (2) Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $B_{X^\#}$  telle que

$$d_Y(T(x) - T(y)) \leq C \left( \int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Théorème 2.6.** (Théorème d'inclusion). Soient  $X, Y$  deux espaces métriques et  $1 \leq p < q < +\infty$ , alors

$$\Pi_p^L(X, Y) \subset \Pi_q^L(X, Y).$$

et

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T),$$

pour tout  $T \in \Pi_p^L(X, Y)$ .

## 2.3 Opérateurs Lipschitz strictement $p$ -sommants

Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  un espace de Bnach. En 2017 l'auteur dans [9] a remarqué que si  $T : X \rightarrow E$  est Lipschitz  $p$ -sommant alors sa linéairisation  $\widehat{T} : \mathcal{F}(X) \rightarrow E$  est  $p$ -sommant, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour cette raison, il a introduit une nouvelle définition dans le but d'avoir cette réciproque manquante. Ces opérateurs sont appelés *strictement Lipschitz  $p$ -sommant*.

### Produit tensoriel Lipschitzien.

On prend un espace métrique pointé  $X$  et un espace de Banach  $E$ , en essayant de donner une nouvelle définition de produit tensoriel Lipschitzien. Ce produit a été introduit par

Cabrera-Padilla et al dans [3]. On note  $X \boxtimes E$  l'espace vectoriel engendré par les tenseur d'ordre 1  $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$ ,

$$X \boxtimes E = \text{span} \{ \delta_{(x,y)} \boxtimes e : x, y \in X \text{ et } e \in E \},$$

où l'élément  $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$  peut être vu comme opérateur linéaire de  $X^\#$  dans  $E$ ,

$$\delta_{(x,y)} \boxtimes e (f) = (f(x) - f(y)) e.$$

C'est à dire

$$X \boxtimes E \subset \mathcal{B}(X^\#, E).$$

### Relation entre norme tensorielle classique et Lipschitzienne.

On définit sur l'espace  $X \boxtimes E$  des normes qui seront appelés normes tensorielles Lipschitziennes. Dans [9], il existe une relation entre les normes tensorielles classiques et les normes tensorielles Lipschitziennes.

**Théorème 2.7** [9]. *Toute norme tensorielle classique  $\alpha$  génère une norme tensorielle Lipschitzienne  $\alpha^L$  telle que*

$$\alpha^L(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i) = \alpha(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \otimes e_i),$$

*Dans ce cas, l'opérateur  $\Phi : X \boxtimes_{\alpha^L} E \rightarrow \mathcal{F}(X) \otimes_\alpha E$  défini par*

$$\Phi(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i) = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \otimes e_i,$$

*est bien défini, linéaire et isométrie. Nous avons l'identification suivante*

$$\boxed{X \widehat{\boxtimes}_{\alpha^L} E = \mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_\alpha E.}$$

**Définition 2.8.** Pour tout  $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k \in X \boxtimes E$ , on pose

$$A_u = \left\{ m = \sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i \in \mathcal{F}(X) \otimes E : m = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes s_k \right\}. \quad (2.2)$$

## 2.4 Caractérisation des opérateurs Lipschitz strictement $p$ -sommants

**Définition 2.9** [9]. Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Soient  $X$  un espace métrique et  $E$  un espace de Banach. Un opérateur Lipschitzien  $T : X \rightarrow E$  est dit strictement Lipschitz  $p$ -sommant s'il existe une constante positive  $C$  telle que pour tous  $x_k, y_k \in X$  et  $s_k^* \in E^*$  ( $1 \leq k \leq l$ ) nous avons

$$\left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| \leq C d_p^L(u), \quad (2.3)$$

où  $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k^*$ . On note  $\Pi_p^{SL}(X, E)$  l'espace de Banach de tous les opérateurs strictement Lipschitz  $p$ -sommant de  $X$  dans  $E$  dont sa norme  $\pi_p^{SL}(T)$  est la plus petite constante  $C$  vérifie (2.3).

**Remarque 2.10** [9]. Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $T$  est  $p$ -sommant.
- 2)  $T$  est Lipschitz  $p$ -sommant
- 3)  $T$  est strictement Lipschitz  $p$ -sommant.

**Théorème 2.11** [2]. Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $X$  un espace métrique et  $E$  un espace de Banach. Soit  $T \in Lip(X, E)$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $T$  est strictement Lipschitz  $p$ -sommant
- 2)  $\hat{T}$  est  $p$ -sommant.
- 3) Il existe une constante  $C > 0$  et une probabilité de Radon  $\mu$  sur  $B_{X^\#}$  telle que pour tout  $(x^j)_{j=1}^n, (y^j)_{j=1}^n \subset X$  et  $(\lambda^j)_{j=1}^n \subset \mathbb{K}; (n \in \mathbb{N}^*)$ , nous avons

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda^j (T(x^j) - T(y^j)) \right\| \leq C \left( \int_{B_{X^\#}} \left| \sum_{j=1}^n \lambda^j (f(x^j) - f(y^j)) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.4)$$

4) Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $(x_i^j)_{i=1}^{n_1}, (y_i^j)_{i=1}^{n_1}$  de  $X$  et  $(\lambda_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{K}; (1 \leq j \leq n_2), n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ , nous avons

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)) \right\| \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in X^\#} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right\| \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

**Preuve.** (1)  $\implies$  (2) : Theorem 3.5 de [7].

(2)  $\implies$  (3) : On fait appel le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs linéaires  $p$ -sommant [4], donc il existe une probabilité de Radon  $\mu$  sur  $B_{X^\#}$  telle que pour tout  $m \in \mathcal{F}(X)$  nous avons

$$\left\| \widehat{T}(m) \right\| \leq C \left( \int_{B_{X^\#}} |f(m)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, soient  $(x^j)_{j=1}^n, (y^j)_{j=1}^n \subset X$  et  $(\lambda^j)_{j=1}^n \subset \mathbb{K}$ , on pose

$$m = \sum_{j=1}^n \lambda^j \delta_{(x^j, y^j)} \in \mathcal{F}(X),$$

Donc

$$\left\| \widehat{T} \left( \sum_{j=1}^n \lambda^j \delta_{(x^j, y^j)} \right) \right\| \leq C \left( \int_{B_{X^\#}} \left| f \left( \sum_{j=1}^n \lambda^j \delta_{(x^j, y^j)} \right) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda^j (T(x^j) - T(y^j)) \right\| \leq C \left( \int_{B_{X^\#}} \left| \sum_{j=1}^n \lambda^j (f(x^j) - f(y^j)) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3)  $\implies$  (4) : Soient  $(x_i^j)_{i=1}^{n_1}, (y_i^j)_{i=1}^{n_1}$  de  $X$  et  $(\lambda_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{K} (1 \leq j \leq n_2)$ , nous avons pour tout  $1 \leq i \leq n_1$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)) \right\| \leq C \left( \int_{B_{X^\#}} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)) \right\|^p \\ & \leq C \int_{B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^p d\mu(f) \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^p.$$

Finalement, nous avons

$$\left( \sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in X^\#} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(4)  $\implies$  (1) : Soit  $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k^* \in X \boxtimes E^*$ . Soit  $A_u$  comme il est définie dans (2.2). Soit  $m = \sum_{i=1}^{n_1} m_i \otimes e_i^* \in A_u$  ( $m_i = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)}$ ), par (2.3)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \langle \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)), e_i^* \rangle \right| \text{ par Hölder} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \|e_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \sup_{f \in X^\#} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \|e_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \| (m_i) \|_{l_p^{n_1, w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i^*) \|_{l_{p^*}^{n_1}(E)}. \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes les représentations de  $m \in A_u$ , on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| \leq C d_p^L(u).$$

Donc,  $T$  est strictement Lipschitz  $p$ -sommant.  $\blacksquare$

## 2.5 Représentation tensorielle Lipschitzienne de la classe $\Pi_p^{SL}(X, E)$

Dans cette partie, on prend un espace métrique et un espace de Banach, en essayant de donner une nouvelle définition de produit tensoriel Lipschitzien. Cette étude a été introduite par Cabrera-Padilla et al en 2015. Soit  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  un espace de Banach. On note  $X \boxtimes E$  l'espace vectoriel engendré par les tenseur d'ordre 1  $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$ . On définit sur l'espace  $X \boxtimes E$  une norme comme dans le cas classique et on essaiera de les identifier avec l'espace des opérateurs strictement Lipschitz  $p$ -sommants.

Pour tout  $u = \sum_{k=1}^n m_k \otimes e_k \in \mathcal{F}(X) \otimes E$ , on pose

$$\Lambda_p^L(u) = \inf \left\{ \|m_i\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(e_i)_i\|_{l_p^n(E)} \right\}.$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations de  $u$  de la forme  $u = \sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i \in \mathcal{F}(X) \otimes E$ .

**Proposition 2.12.** Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  un espace de Banach. Soit  $p \in [1, \infty]$ , alors  $\Lambda_p^L$  est une norme sur  $\mathcal{F}(X) \otimes E$ .

**Preuve.** Il est clair que pour tout  $u \in \mathcal{F}(X) \otimes E$  et tout scalaire  $\alpha$  nous avons

$$\Lambda_p^L(u) \geq 0 \text{ and } \Lambda_p^L(\alpha u) = |\alpha| \Lambda_p^L(u).$$

Soit  $u_1, u_2 \in \mathcal{F}(X) \otimes E$ . Par la définition de  $\pi_p^L$ , on peut trouver une représentation

$$u_1 = \sum_{i=1}^l m_i^1 \otimes e_i^1,$$

telle que

$$\|m_i^1\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(e_i^1)_i\|_{l_p^n(E)} \leq \Lambda_p^L(u_1) + \varepsilon.$$

Remplaçons  $(m_i^1)$  and  $(e_i^1)$  par

$$m_i^1 = m_i^1 \frac{\|(e_i^1)_i\|_{l_p^n(E)}^{\frac{1}{p}}}{\|m_i^1\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))}^{\frac{1}{p^*}}}, e_i^1 = e_i^1 \frac{\|m_i^1\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))}^{\frac{1}{p^*}}}{\|(e_i^1)_i\|_{l_p^n(E)}^{\frac{1}{p}}},$$

on trouve

$$\|m_i^1\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \leq (\Lambda_p^L(u_1) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}, \quad \|(e_i^1)_i\|_{l_p^n(E)} \leq (\Lambda_p^L(u_1) + \varepsilon)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Similairement pour  $u_2$ , on choisit une représentation

$$u_2 = \sum_{i=1}^s m_i^2 \otimes e_i^2,$$



telle que

$$\|m_i^2\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(e_i^2)_i\|_{l_p^n(E)} \leq \Lambda_p^L(u_2) + \varepsilon..$$

Encore, remplaçons  $(m_i^2)$  and  $(e_i^2)$  comme dans  $u_1$ , on obtient

$$\|m_i^2\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \leq (\Lambda_p^L(u_2) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}, \quad \|(e_i^2)_i\|_{l_p^n(E)} \leq (\Lambda_p^L(u_2) + \varepsilon)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned} & \Lambda_p^L(u_1 + u_2) \\ & \leq \left( \|m_i^1\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))}^p + \|m_i^2\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \|(e_i^1)_i\|_{l_p^n(E)}^{p^*} + \|(e_i^2)_i\|_{l_p^n(E)}^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq (\Lambda_p^L(u_1) + \Lambda_p^L(u_2) + 2\varepsilon)^{\frac{1}{p}} (\Lambda_p^L(u_1) + \Lambda_p^L(u_2) + 2\varepsilon)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq \Lambda_p^L(u_1) + \Lambda_p^L(u_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant  $\varepsilon$  tend vers zero, on obtient l'inégalité triangulaire pour  $\Lambda_p^L$ .  $\blacksquare$

On note  $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_{\Lambda_p^L} E$  le complété de  $\mathcal{F}(X) \otimes E$  pour la norme  $\Lambda_p^L$ .

**Proposition 2.13.** Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  un espace de Banach. Soit  $p \in [1, \infty]$ , alors nous avons l'identification isométrique suivante

$$\left( \mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_{\Lambda_p^L} E^* \right)^* = \Pi_p^{SL}(X, E).$$

**Preuve.** Soient  $T \in \Pi_p^{SL}(X, E)$  et  $\widehat{T}$  son opérateur linéaire adjoint. D'après le théorème [3],  $\widehat{T}$  est  $p$ -sommant. On définit la fonction linéaire suivante sur  $\mathcal{F}(X) \otimes E^*$  par

$$\Psi_T(u) = \sum_{k=1}^n \left\langle \widehat{T}(m_k), e_k^* \right\rangle,$$

où  $u = \sum_{k=1}^n m_k \otimes e_k^*$ . Soit  $u \in \mathcal{F}(X) \otimes E^*$ , nous avons

$$\begin{aligned} |\Psi_T(u)| &= \left| \sum_{k=1}^n \langle \widehat{T}(m_k), e_k^* \rangle \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \langle \widehat{T}(m_k), e_k^* \rangle \right| \text{ par Hölder} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n \left\| \widehat{T}(m_k) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n \|e_k^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Comme  $\widehat{T}$  est  $p$ -sommant, on obtient

$$|\Psi_T(u)| \leq \pi_p(\widehat{T}) \|m_k\|_{l_p^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(e_k^*)_k\|_{l_{p^*}^n(E)}$$

Donc, comme  $u$  est arbitraire,  $\Psi_T$  is  $\Lambda_p^L$ -continue sur  $\mathcal{F}(X) \otimes E^*$  et

$$\|\Psi_T\|_{\Lambda_p^L} \leq \pi_p(\widehat{T}).$$

Inversement, soit  $u \in \left( \mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_{\Lambda_p^L} E^* \right)^*$ . On considère la fonction  $B_u$  définie par

$$B_u(m)(e^*) = u(m \otimes e^*).$$

Il est clair que  $B_u \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(X), E)$ . Soit  $m_i \in \mathcal{F}(X)$  et  $e_i^* \in E^*$ , nous avons

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n \|B_u(m_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|(e_k^*)_k\|_{l_{p^*}^n(E^*)}=1} \left| \sum_{k=1}^n \langle B_u(m_k), e_k^* \rangle \right| \\ &= \sup_{\|(e_k^*)_k\|_{l_{p^*}^n(E^*)}=1} \left| u \left( \sum_{k=1}^n m_k \otimes e_k^* \right) \right| \\ &\leq \|u\|_{\Lambda_p^L} \sup_{\|(e_k^*)_k\|_{l_{p^*}^n(E^*)}=1} \Lambda_p^L \left( \sum_{k=1}^n m_k \otimes e_k^* \right) \\ &\leq \|u\|_{\Lambda_p^L} \|m_k\|_{l_p^{n,w}(\mathcal{F}(X))}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|B_u(m_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{\Lambda_p^L} \|m_k\|_{l_{p^*}^{n,w}(\mathcal{F}(X))}.$$

C'est à dire  $B_u$  est  $p$ -sommant, alors d'après l'identification

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}(X), E) = Lip_0(X, E)$$

il existe donc un unique opérateur lipschitzien  $T : X \rightarrow E$  qui vérifie

$$\widehat{T} = B_u,$$

alors, d'après le Théorème 2.11,  $T$  est stictement Lipschitz  $p$ -sommant ce qui montre la deuxième inclusion. ■

# Chapitre 3

## La classe des opérateurs Lipschitziens $\phi$ -sommants

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier la classe des opérateurs Lipschitz  $\Phi$ -sommants. Cette classe est une généralisation naturelle de celle du cas linéaire introduite par R. Khalil et W. Deeb en 1987. On verra qu'elle vérifie également le théorème de factorisation de Pietsch. On termine ce chapitre par donner la définition des opérateurs Lipschitz  $(\varphi, \phi)$ -sommants.

### 3.2 Les opérateurs linéaires $\phi$ -sommants

En 1987 R. Khalil et W. Deeb ont introduit la notion des opérateurs linéaires  $\phi$ -sommants. Ils ont utilisé dans leur définition la fonction de modulus  $\phi$ . Dans ce chapitre, on va étudier cette classe d'opérateurs et leurs propriétés. On commence par la définition de modulus suivante.

**Définition 3.1.** Soit  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction continue . On dit que  $\phi$  est modulus si :

- (i)  $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$
- (ii)  $\phi(0) = 0$
- (iii)  $\phi$  est croissante.

**Exemple 3.2.** Les fonctions  $\phi(x) = x^p$ ,  $0 < p \leq 1$  et  $\phi(x) = \ln(1+x)$  sont des fonctions modulus.

**Définition 3.3.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $\phi$  une fonction de modulus.

On définit les deux espaces suivants :

$$(i) \ l^\phi\langle E \rangle = \left\{ (x_n) : \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_n \phi|\langle x_n, x^* \rangle| < \infty, \ x_n \in E \right\}.$$

$$(ii) \ l^\phi(F) = \left\{ (x_n) : \sum_n \phi\|x_n\| < \infty, \ x_n \in F \right\}.$$

Pour tout  $x = (x_n) \in l^\phi\langle E \rangle$ . On définit

$$\|x\|_\varepsilon^\phi = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_n \phi|\langle x_n, x^* \rangle|,$$

et pour tout  $y = (y_n) \in l^\phi(F)$  on définit

$$\|y\|_\pi^\phi = \sum_n \phi\|y_n\|.$$

**Remarque 3.4** [3]. Les espaces  $l^\phi\langle E \rangle$  et  $l^\phi(F)$  sont des généralisations des espaces  $l^p\langle E \rangle$  et  $l^p(F)$  respectivement pour tout  $0 < p < 1$ .

**Définition 3.5** [3]. Soit  $T : l^\phi\langle E \rangle \rightarrow l^\phi(F)$  un opérateur linéaire.  $T$  est dit métriquement borné si pour tout  $x = (x_n) \in l^\phi\langle E \rangle$  il existe  $\lambda > 0$  telle que :

$$\|T(x)\|_\pi^\phi \leq \lambda \|x\|_\varepsilon^\phi.$$

On note  $L^\phi(E, F)$  les espaces de tous les opérateurs métriquement bornés muni de la norme suivante

$$\|T\|_\phi = \inf \left\{ \lambda : \|T(x)\|_\pi^\phi \leq \lambda \|x\|_\varepsilon^\phi, \ x \in l^\phi\langle E \rangle \right\}.$$

**Remarque 3.6** [7]. Pour tout  $x = (x_n) \in l^\phi\langle E \rangle$ . Il est clair que chaque opérateur métriquement bornée est continu.

**Définition 3.7** [7]. Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire borné. On dit que  $T$  est  $\phi$ -sommant si pour tout  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E$  il existe  $\lambda > 0$  telle que

$$\sum_1^n \phi \|T(x_i)\| \leq \lambda \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_1^n \phi |\langle x_i, x^* \rangle| \quad (2.2)$$

Cette définition est une généralisation de la définition des opérateurs  $p$ -sommants pour tout  $0 < p \leq 1$ .

On note  $\Pi^\phi(E, F)$  l'ensemble de tous les opérateurs  $\phi$ -sommants de  $E$  dans  $F$ . Pour chaque  $T \in \Pi^\phi(E, F)$  on définit  $\tilde{T} \in L^\phi(E, F)$  par

$$\begin{aligned} \tilde{T} : l^\phi\langle E \rangle &\rightarrow l^\phi(F) \\ \tilde{T}((x_n)) &= ((Tx_n)) \end{aligned}$$

Pour  $T \in \Pi^\phi(E, F)$ , on définit la métrique  $\phi$ -sommante de  $T$

$$\|T\|_\phi = \inf \{ \lambda : \text{vérifie (2.2)} \}.$$

**Théorème 3.8** [7]. Soient  $T \in \Pi^\phi(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{B}(G, E)$ , et  $K \in \mathcal{B}(F, H)$ . Alors  $T \circ g \in \Pi^\phi(G, E)$  et  $K \circ T \in \Pi^\phi(E, H)$ .

i.e.,

$$\|T \circ g\|_\phi \leq (\|g\| + 1) \|T\|_\phi$$

et

$$\|K \circ T\|_\phi \leq (\|K\| + 1) \|T\|_\phi.$$

### 3.3 Théorème de Domination de Pietsch

Le théorème suivant est une version de théorème de domination de pietsch pour cet espace.

**Théorème 3.9** [7]. *Soit  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1)  $T \in \Pi^\phi(E, F)$ .

(2) *Il existe  $\lambda > 0$  est une mesure de probabilité régulière  $\nu$  telle que*

$$\phi \|T(x)\| \leq \lambda \int_{B_{E^*}} \phi |\langle x, x^* \rangle| d\nu(x).$$

**Preuve.** (2)  $\Rightarrow$  (1) : Cela est évident.

(1)  $\Rightarrow$  (2) Soit  $T \in \Pi^\phi(E, F)$  et  $\lambda = \|T\|_\phi$ . Pour toute suite finie  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E$ . On définit l'application suivante

$$Q(\mu) = \sum_1^N \phi \|T(x_n)\| - \lambda \sum_1^N \int_{B_1^*(E)} \phi |\langle x_n, x^* \rangle| d\mu(x) \quad (2.3)$$

Il est clair que la fonction  $Q$  est convexe. De plus, il y a un point  $\mu_0$  telle que  $Q(\mu_0) < 0$ . En effet, choisissez  $\mu_0$  la mesure de Dirac à  $x_0^*$ , où

$$\sum_1^N \phi |\langle x_n, x_0^* \rangle| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_1^N \phi |\langle x_n, x^* \rangle|.$$

De plus, si  $\{Q_1, \dots, Q_r\}$  est une collection de telles fonctions définies par (2.3), puis pour tout  $a_1, \dots, a_r$ ,  $\sum_1^r a_k$ , Il y a  $Q$  défini de la même manière, telle que

$$\sum_1^r a_k Q_k(\mu) \leq Q(\mu)$$

pour tout  $\mu$ . Par conséquent, il existe une mesure  $\nu$  telle que  $Q(\nu) \leq 0$  pour tous les  $Q$  définis par (2.3). En particulier si  $Q$  est définie par (2.3) avec la suite associée  $\{x\}$ ,  $x \in E$ ,

nous obtenons

$$\phi \|T(x)\| \leq \lambda \int_{B_{E^*}} \phi |\langle x, x^* \rangle| d\nu(x). \quad \blacksquare$$

**Théorème 3.10.** Soit  $X$  un espace de Banach avec la propriété d'approximation métrique et  $\phi$  est une fonction modulaire, Alors  $\Pi_\phi(X, X) = \Pi_p(X, X)$  pour  $0 < p < 1$ .

### 3.4 Les opérateurs lipschitziens $\phi$ -sommants

L'espace  $\Pi_\phi^L(E, F)$  des opérateur Lipschitziens  $\phi$ -sommants a été introduit par M. Belaala en 2017. Il est une généralisation naturelle du cas linéaire.

**Définition 3.11** [1]. Soit  $\phi$  est une fonction modulus et soient  $X, Y$  des espaces métriques pointés et  $T \in Lip(X, Y)$ . On dit que  $T$  est Lipschitze  $\phi$ -sommant si pour tous  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$  il existe  $C > 0$  et  $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset R_+$  telle que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(d(T(x_i)), d(T(x'_i))) \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi |f(x_i) - f(x'_i)| \quad (3.1)$$

La classe des opérateurs Lipschitziens  $\phi$ -sommants de  $X$  dans  $Y$  est notée par  $\Pi_\phi^L(X, Y)$  et

$$\pi_\phi^L(T) = \inf \{C; C \text{ vérifiant l'inégalité (3.1)}\}.$$

**Remarque 3.12.** Dans la définition, on peut prendre les  $\alpha_i = 1$ .

**Notation.** Soit  $(X, d)$  est un espace métrique pointé, Nous pouvons considérer une nouvelle distance sur  $X$  par  $d_\phi = \phi \circ d$ . On note

$$Lip_\phi(X, Y) = Lip((X, \phi \circ d), (Y, \phi \circ d))$$

et

$$Lip_\phi(T) = \sup \left\{ \frac{\phi(d(T(x), T(y)))}{\phi(d(x, y))} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$



**Proposition 3.13.** Soit  $\phi$  une fonction modulus et soient  $X, Y$  deux espaces métriques pointés.

- (1)  $Lip(X, Y) \subset Lip_\phi(X, Y)$  et  $Lip_\phi(T) \leq 1 + Lip(T)$  pour tout  $T \in Lip(X, Y)$ .  
(2)  $\Pi_\phi^L(X, Y) \subset Lip_\phi(X, Y)$  et  $Lip_\phi(T) \leq \pi_\phi^L(T)$  pour tout  $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$ .

**Preuve.**

- (1) Si  $T \in Lip(X, Y)$ , Alors

$$d(T(x), T(y)) \leq Lip(T) d(x, y)$$

pour tout  $x, y \in X$ , et comme  $\phi$  est croissante alors

$$\begin{aligned} \phi(d(T(x), T(y))) &\leq \phi(Lip(T) d(x, y)) \\ &\leq (1 + Lip(T)) \phi(d(x, y)). \end{aligned}$$

Alors pour tout  $x, y \in X$  on a

$$Lip(X, Y) \subset Lip_\phi(X, Y) \text{ et } Lip_\phi(T) \leq 1 + Lip(T).$$

- (2) Si  $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$ , On a

$$\sum_1^n \phi(d(T(x_i), d(T(x'_i)))) \leq C \sup_{f \in B_{X\#}} \sum_1^n \phi|f(x_i) - f(x'_i)|.$$

Pour tout  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$ . Pour  $n = 1$  on trouve

$$\begin{aligned} \phi(d(T(x_i), d(T(x'_i)))) &\leq \pi_\phi^L \sup_{f \in B_{X\#}} \phi|f(x_i) - f(x'_i)| \\ &= \pi_\phi^L(T) \phi d(x, y). \end{aligned}$$

Pour tout  $x, y \in X$  nous obtenons (2). Pour la dernière inégalité ci-dessus, on note que

$$\phi(d(x, y)) = \phi(|h(x) - h(y)|) \leq \sup_{f \in B_{X\#}} \phi(|f(x) - f(y)|) \leq \phi(d(x, y))$$

où  $h$  est une fonction dans  $B_{X\#}$  définie par

$$h(z) = d(z, y) - d(0, y)$$

pour tout  $z \in X$ . ■

Nous étudions maintenant la relation entre un opérateur Lipschitz  $\phi$ –sommant et sa version linéaire.

**Proposition 3.14** [1]. *Soient  $\phi$  est une fonction modulus,  $X, Y$  deux espaces de Banach et  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire  $\phi$ –sommant. Alors  $T$  est Lipschitz  $\phi$ –sommant et*

$$\pi_{\phi}^L(T) \leq \pi^L(T).$$

**Preuve.** Soit  $T \in \Pi_{\phi}^L(X, Y)$ , On a pour tout  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(\|T(x_i) - T(x'_i)\|) &= \sum_{i=1}^n \phi(\|T(x_i - x'_i)\|) \\ &\leq \pi_{\phi}(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \phi(|x^*(x_i - x'_i)|) \\ &= \pi_{\phi}(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \phi(|x^*(x_i) - x^*(x'_i)|) \\ &\leq \pi_{\phi}(T) \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous montrons ensuite que  $\Pi_{\phi}^L(X, Y)$  vérifie la propriété d'ideal.

**Proposition 3.15** [1]. *Soit  $\phi$  une fonction modulus, soient  $X, Y, Z$  et  $W$  des espaces métriques pointés, et  $B \in Lip_{\phi}(X, Y)$ ,  $T \in \Pi_{\phi}^L(Y, Z)$  et  $A \in Lip_{\phi}(Z, W)$ . Alors*

$$ATB \in \Pi_{\phi}^L(X, W),$$

et

$$\pi_{\phi}^L(ATB) \leq Lip_{\phi}(A) \pi_{\phi}^L(T) Lip_{\phi}(B).$$

**Preuve.** Pour tout  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$ , on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \phi(d(ATB(x_i)), d(ATB(x'_i))) &\leq Lip_\phi(A) \sum_{i=1}^n \phi(d(TB(x_i)), d(TB(x'_i))) \\
&\leq Lip_\phi(A) \pi_\phi^L(T) \sup_{g \in B_{Y^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|g(B(x_i)) - g(B(x'_i))|) \\
&\leq Lip_\phi(A) \pi_\phi^L(T) \sup_{g \in B_{Y^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(Lip(g) d(B(x_i), B(x'_i)))
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \phi(d(ATB(x_i)), d(ATB(x'_i))) &\leq Lip_\phi(A) \pi_\phi^L(T) \sum_{i=1}^n \phi(d(B(x_i), B(x'_i))) \\
&\leq Lip_\phi(A) \pi_\phi^L(T) Lip_\phi(B) \sum_{i=1}^n \phi(d(x_i, x'_i)) \\
&= Lip_\phi(A) \pi_\phi^L(T) Lip_\phi(B) \sum_{i=1}^n \phi(|h_i(x_i) - h_i(x'_i)|) \\
&\leq Lip_\phi(A) \pi_\phi^L(T) Lip_\phi(B) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposition 3.16.** Soient  $\phi$  une fonction de modulus et  $X, Y, Z$  des espaces métriques pointés. Si  $\iota : Y \rightarrow Z$  est une isométrie, alors  $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$  si et seulement si  $\iota T \in \Pi_\phi^L(X, Z)$ . Dans ce cas

$$\pi_\phi^L(\iota T) = \pi_\phi^L(T).$$

### 3.5 Théorème de Domination de Pietsch (Version lipschizienne)

Le théoreme suivant est une version de théoreme de domination de Pietsch pour cet espace.

**Théorème 3.17** [1]. Soient  $\phi$  une fonction modulus et  $X, Y$  deux espaces métriques pointés,  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur lipschitzien. Alors  $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$  si et seulement si il existe un constant  $C > 0$  et une mesure de probabilité régulière  $\mu$  sur  $B_{X^\#}$  telle que

$$\phi(d(T(x); T(y))) \leq C \int_{B_{X^\#}} \phi(|f(x) - f(y)|) d\mu(f) \quad (3.2)$$

pour tout  $x, y \in X$ . Dans ce cas,  $\pi_\phi^L(T)$  est le minimum de toutes les constantes  $C$  pour lequel une mesure existe, i.e.,

$$\pi_\phi^L(T) = \inf \{C, \text{vérifie (3.2)}\}.$$

**Preuve.** Supposons que  $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$ . Pour tout  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$ , on définit la fonction  $\varphi_{(x_i, x'_i)_{i=1}^n} : B_{X^\#} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\varphi_{(x_i, x'_i)_{i=1}^n}(f) = \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), T(x'_i)) - \pi_\phi^L(T) \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|)).$$

Soit  $A$  l'ensemble constitué de telles fonctions. Il est facile de prouver que  $A$  est une partie convexe de  $C(B_{X^\#})$ . Considérons maintenant l'ensemble

$$B = \{\varphi \in C(B_{X^\#}) : \varphi(f) > 0, \forall f \in B_{X^\#}\}.$$

Il est clair que  $B$  est une partie ouverte convexe sur l'espace  $C(B_{X^\#})$ . De plus,  $A$  et  $B$  sont adjoints. D'autre part, on peut trouver dans  $X$  telle que  $\varphi_{(x_i, x'_i)_{i=1}^n}(f)$ . Pour tout  $f \in B_{X^\#}$ ,

$$\pi_\phi^L(T) \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) < \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), T(x'_i)))$$

pour tout  $f \in B_{X^\#}$ . Mais  $B_{X^\#}$  est faible  $*$ -compacte et  $f \rightarrow \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|)$  est une fonction continue de  $(B_{X^\#}, w^*)$  vers  $\mathbb{R}$ , Nous aurions

$$\pi_\phi^L(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) \leq \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), d(T(x'_i))))$$

ce que est impossible car  $T$  est dans  $\Pi_\phi^L(X, Y)$ . Donc, par le théorème de séparation de Hahn-Banach et théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de probabilité  $\mu$  dans  $B_{X^\#}$  et un scalaire  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$\int_{B_{X^\#}} \varphi_{(x_i, x'_i)_{i=1}^n} d\mu \leq c < \int_{B_{X^\#}} \varphi d\mu$$

pour tout  $\varphi_{(x_i, x'_i)_{i=1}^n} \in A$  et tout  $\varphi \in B$ . Remarquons que  $c = 0$  puisque la fonction zero  $\varphi_{(x_i, x'_i)_{i=1}^n}$  est dans  $A$ , et  $c \leq 0$  puisque toutes les fonctions constantes positives sont dans  $B$ . Il s'en suit que

$$\int_{B_{X^\#}} \varphi_{(x, y)}(f) d\mu (f \leq 0)$$

pour tout  $x, y \in X$ , et puisque  $\mu$  est une mesure de probabilité. Nous concluons que

$$\phi(d(T(x)), d(T(y))) \leq \pi_\phi^L(T) \int_{B_{X^\#}} \varphi(|f(x) - f(y)|) d\mu(f).$$

pour tout  $x, y \in X$ . Inversement, supposons que la deuxième condition du théorème est vraie. Soit  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$ . Nous avons

$$\phi(d(T(x_i)), d(T(x'_i))) \leq C \int_{B_{X^\#}} \varphi(|f(x_i) - f(x'_i)|) d\mu(f).$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i)), d(T(x'_i))) &\leq C \int_{B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \varphi(|f(x_i) - f(x'_i)|) d\mu(f) \\ &\leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \int_{B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \varphi(|f(x_i) - f(x'_i)|) d\mu(f) \\ &= \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \varphi(|f(x_i) - f(x'_i)|). \end{aligned}$$

Alors  $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$  et  $\pi_\phi^L(T) \leq C$ . Enfin, il est clair de la preuve que  $\pi_\phi^L(T)$  est la valeur minimale de  $C$ . ■

**Proposition 3.18.** Soient  $\phi$  une fonction de modulus et  $X, Y$  deux espaces métriques pointés. Soit  $T : X \rightarrow Y$ . Si  $\tilde{T}$  est  $\phi$ -sommant, alors  $T$  est lipschitz  $\phi$ -sommant et

$$\pi_{\phi}^L(T) \leq \pi_{\phi}(\tilde{T}).$$

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \|\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}\| \\ &= \|\tilde{T}(\delta_x) - \tilde{T}(\delta_y)\| = \|\tilde{T}(\delta_x - \delta_y)\| \end{aligned}$$

pour tout  $x, y \in X$ . Si  $\tilde{T}$  est  $\phi$ -sommant, on a

$$\sum_{i=1}^n \phi(\|\tilde{T}(\gamma_i)\|) \leq \pi_{\phi}(\tilde{T}) \sup_{F \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} \sum_{i=1}^n \phi(|F(\gamma_i)|)$$

pour tout  $(\gamma_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{F}(X)$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), T(y_i))) &\leq \pi_{\phi}(\tilde{T}) \sup_{F \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} \sum_{i=1}^n \phi(|F(\delta_{x_i} - \delta_{y_i})|) \\ &= \pi_{\phi}(\tilde{T}) \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \sum_{i=1}^n \phi(|Q_X(f)(\delta_{x_i} - \delta_{y_i})|) \\ &= \pi_{\phi}(\tilde{T}) \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(y_i)|). \end{aligned}$$

Finalement ;  $T$  est lipschitz  $\phi$ -sommant et

$$\pi_{\phi}^L(T) \leq \pi_{\phi}(\tilde{T}). \quad \blacksquare$$

### 3.6 Les opérateurs Lipschitziens $(\varphi, \phi)$ -sommants

Dans cette section on donne la définition d'un opérateur Lipschitz  $(\varphi, \phi)$ -sommant avec  $\varphi, \phi$  sont deux fonctions modulus.

**Définition 3.19.** Soient  $\varphi, \phi$  deux fonctions modulus. Soient  $X, Y$  des espaces métriques pointés et  $T \in \text{Lip}(X, Y)$ . On dit que  $T$  est Lipschitzien  $(\varphi, \phi)$ -sommant si pour tous  $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$  il existe  $C > 0$  et  $(\alpha_i)_{i=1}^{i=n} \subset R_+$  telle que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(d(T(x_i)), d(T(x'_i))) \leq C \sup_{f \in B_{X^n}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi|f(x_i) - f(x'_i)|. \quad (3.3)$$

La classe des opérateurs Lipschitziens  $(\varphi, \phi)$ -sommants de  $X$  dans  $Y$  est notée par  $\Pi_{(\varphi, \phi)}^L(X, Y)$ . Muni de la norme suivante

$$\pi_{(\varphi, \phi)}^L(T) = \inf \{C; C \text{ vérifiant l'inégalité (3.3)}\}.$$

**Remarque 3.20.**

- 1) Dans la définition, on peut prendre les  $\alpha_i = 1$ .
- 2) Si  $\varphi = \phi$ , on a

$$\Pi_{(\phi, \phi)}^L(X, Y) = \Pi_{\phi}^L(X, Y).$$

# Bibliographie

- [1] M. BELAALA, *Lipschitz  $\phi$ -summing operator*, Analele Universitatii Oradea. Fasc. Matematica, Tom XXIV (2017), Issue No. 2, 175–180.
- [2] M. BELAALA AND K SAADI, *Further results on strictly Lipschitz summing operators*. *Arxiv* (2017).
- [3] M. G. CABRERA-PADILLA, J. A. CHÁVEZ-DOMÍNGUEZ, A. JIMÉNEZ-VARGAS AND M. VILLEGAS-VALLECILLOS, *Lipschitz tensor product*, Khayyam J. Math. **1** (2015), no. 2, 185–218.
- [4] J. DIESTEL, H. JARCHOW AND A. TONGE, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] J. D. FARMER AND W. B. JOHNSON, *Lipschitz  $p$ -summing Operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137**, no.9, (2009) 2989-2995.
- [6] G. GODEFROY AND N. J. KALTON, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Mathematica **159** (1) (2003) 121-141.
- [7] R KHALIL AND W DEEB,  *$\phi$ -Summing operators in Banach spaces*, V. 127, Issue 2, 1 November 1987, Pages 577-584.
- [8] K. SAADI, *Some properties of Lipschitz strongly  $p$ -summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), no. 2, 1410-1426.
- [9] K. SAADI, *On the composition ideals of Lipschitz mappings*, Banach J. Math. Anal. Volume 11, Number 4 (2017), 825-840.